SO00CM90 – STATISTIQUES INFERENTIELLES
FORMULAIRE

X variable aléatoire discrète finie : X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i \qquad \sigma^2 = Var[X] = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - \mu^2$$

Propriétés : Soit a une constante et X_1 et X_2 deux variables aléatoires

$$E[aX] = aE[X] \qquad E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] \qquad E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2]$$

$$Var[aX] = a^2 Var[X]$$

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] \qquad Var[X_1 - X_2] = Var[X_1] + Var[X_2]$$

<u>Loi de Bernouilli</u> $\mathcal{L}$ (X) = $\mathcal{B}$ (1,p)

$$X = \begin{cases} 1 & si \quad succès \quad p \\ 0 & si \quad échec \quad q = 1 - p \end{cases}$$

$$\mu = E[X] = p \qquad Var[X] = pq \qquad \sigma = \sqrt{pq}$$

<u>Loi Binomiale</u> $\mathcal{L}\left(S_n\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathcal{B}$ (n,p)

Les variables Xi suivent des lois de Bernouilli

$S_n = k$ k varie de 0 à n $P[S_n = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$\mu = E[S_n] = np \qquad Var[S_n] = npq \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

<u>Loi Pseudo-Binomiale</u> $\mathcal{L}\left(F_n\right) = \mathcal{L}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathcal{PB}$ (n,p)

$F_n = \frac{k}{n}$ k varie de 0 à n $P[S_n = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$\mu = E[F_n] = p \qquad Var[F_n] = \frac{pq}{n} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

<u>Loi Hypergéométrique</u> $\mathcal{L}\left(S_n\right) = \mathcal{H}$ (N,n,p)

$$\begin{cases} N = taille \quad de \quad l'urne \\ N_1 = nombre \quad de \quad succès \\ p = \frac{N_1}{N} \end{cases}$$

$$P\left(S_n = k\right) = \frac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \qquad \mu = E[S_n] = np \qquad Var[S_n] = npq\frac{N-n}{N-1}$$

Si $\frac{n}{N} \leq \frac{1}{10}$ alors on peut approcher la loi Hypergéométrique par la loi Binomiale.

LOIS CONTINUES

<u>Loi normale centrée réduite</u> $\mathcal{L}$ (X) = $\mathcal{N}$(0,1)

$\mu = E[X] = 0$ $\sigma = 1$

$F(X) = P(X < x)$ ⇒ table 1 $F(X) = P(X \notin [-x,+x])$ ⇒ table 2

<u>Loi normale quelconque</u> $\mathcal{L}$ (X) = $\mathcal{N}$(μ, σ)

$X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ $\mathcal{L}$ (X*) = $\mathcal{N}$(0, 1)

<u>Formule de standardisation</u>

$$P(X \in [a,b]) = P\left(X^* \in \left[\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma}\right]\right)$$

Propriétés

1) Si $\mathcal{L}$ (X) = $\mathcal{N}$(μ, σ)
et si a et b sont deux constantes
alors $\mathcal{L}(aX+b) = \mathcal{N}(a\mu+b, |a|\sigma)$

2) Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes /
$\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$
et $\mathcal{L}(X_2) = \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$
alors
$\mathcal{L}(X_1+X_2) = \mathcal{N}\left(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$
$\mathcal{L}(X_1-X_2) = \mathcal{N}\left(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$

3) Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes /
$\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{L}(X_2) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
alors $\mathcal{L}(X_1+X_2) = \mathcal{N}\left(2\mu, \sigma\sqrt{2}\right)$

4) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes /
$\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{L}(X_2) = \ldots = \mathcal{L}(X_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
alors $\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathcal{N}\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)$

ECHANTILLONS

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un n-échantillon issu de X.

$\overline{X} = \dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ est la moyenne théorique de cet échantillon.

1) Si $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
alors $\mathcal{L}(\overline{X}) = \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

2) Si $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{L}(\mu, \sigma)$
en vertu du théorème central limite,
Si « n est assez grand »,
alors $\mathcal{L}(\overline{X}) \cong \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

3) Si $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{B}(n, p)$, alors $\overline{X} = F_n$
Si np et nq sont supérieurs à 10,
en vertu du théorème central limite,
alors $\mathcal{L}(F_n) \cong \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$

RESOLUTION

Population	Echantillon théorique	Echantillon observé
un individu tiré de la population X variable aléatoire le caractérisant μ = espérance mathématique = moyenne dans la population σ^2 = variance	n individus quelconques tirés de la population $X_1, X_2, ..., X_n$ un n-échantillon de v.a. issu de X $\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ = moyenne dans un échantillon théorique $S^2 = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}$ = variance théorique	n individus d'un échantillon observé $x_1, x_2, ..., x_n$ un n-échantillon observé = réalisations des $X_1, X_2, ..., X_n$ $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = moyenne dans l'échantillon observé $s^2 = \frac{\sum \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$ = variance observée
$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\mathcal{L}\left(\overline{X}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ $\forall$ n	$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = réalisation de $\overline{X}$ = moyenne observée dans l'échantillon
$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\mu, \sigma)$	$\mathcal{L}\left(\overline{X}\right) \cong \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ « si n est grand »	$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = réalisation de $\overline{X}$ = moyenne observée dans l'échantillon
$\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(1, p)$ p = fréquence de succès dans la population	$\overline{X} = F_n$ = fréquence de succès théorique dans un n-échantillon $\mathcal{L}(F_n) = \mathcal{PB}(n, p)$ $\cong \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ « si np et nq > 10 »	$\overline{x} = f_n = \frac{\sum x_i}{n}$ = réalisation de F_n = fréquence de succès dans l'échantillon observé

ANNEXES : TABLES

Table 1

Table de la loi Normale centrée réduite N(0,1) -L(X*) = N(0,1)

Cette table donne la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure à t : F(t) = P(X* <t)*

L'unité et les déciles de "t"

	les centiles de "t"									
t	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

En grisé les valeurs de 1-α/2

Exemple pour α=5% alors (1-α/2)=0,975 et t=1,96

Pour les valeurs élevées de t

t	P(X* <t)
3	0,9987
3,5	0,9998
4	1,0000

Quelques valeurs clés pour α

α	$t_{1-\alpha/2}$
1%	2,575
5%	1,960
10%	1,645

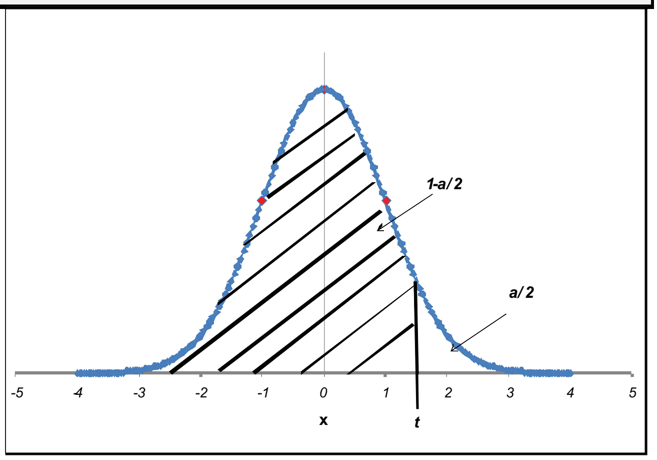

Table 2

Table de la loi Normale centrée réduite N(0,1) -L(X*) = N(0,1)

Cette table donne pour un " α" donné *la valeur de "t" telle que P(| X* | >t) =* α

L'unité et les déciles de "α"	les centiles de "α"									
α	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	*infini*	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

En grisé les valeurs de t

Exemple pour α=5% t=1,96

Quelques valeurs clés pour α

α	t
1%	2,575
5%	1,960
10%	1,645

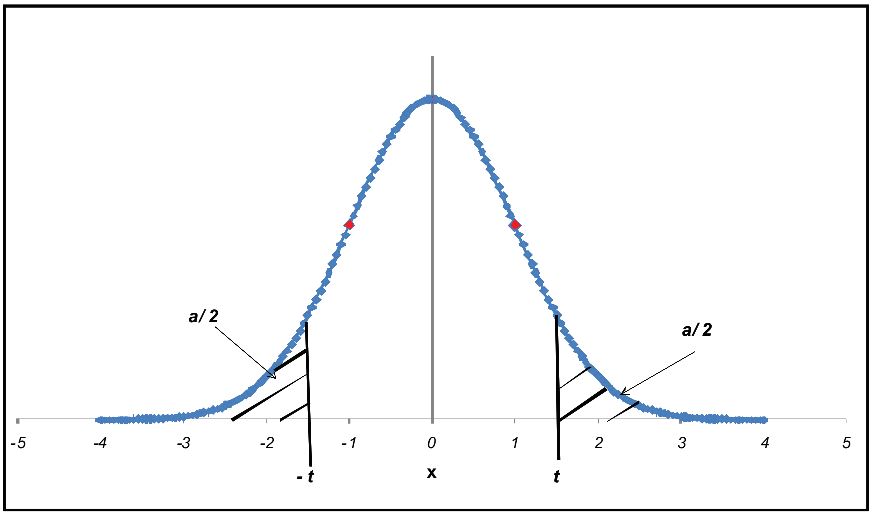

Table 3

Table de la loi de STUDENT

Cette table donne pour un " α" donné et v (degrés de liberté) donné la valeur de "t" telle que P(|T| >t) = α

	α								
v - degrés de libertés	**0,9**	**0,5**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735

En grisé les valeurs de t

Exemple pour α=2% et v=20

t= 2,528

Quelques valeurs clés pour α

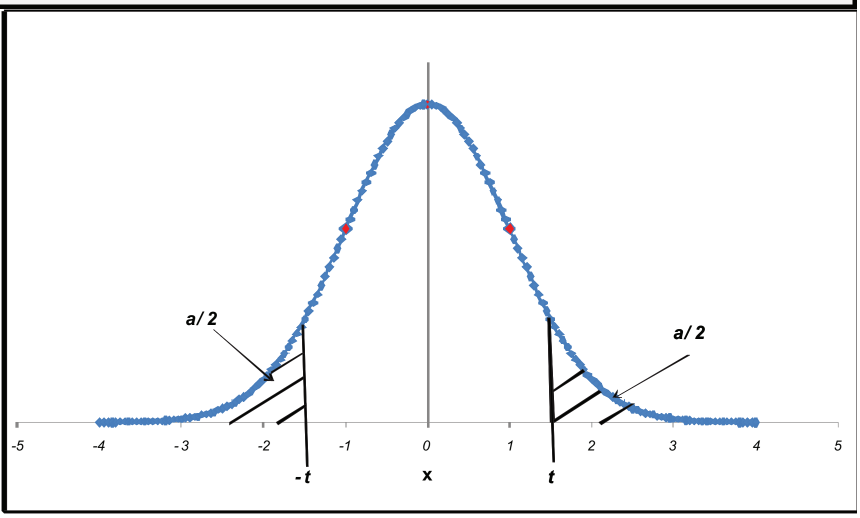

Table 4

Table de la loi du Chi-2

Cette table donne pour un " α" donné et ν (degrés de liberté) donné *la valeur du χ2 telle que* $P(Y^2 > \chi_2) = \alpha$

ν - degrés de libertés	α 0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,12
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,31
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

En grisé les valeurs de χ2

Exemple pour α=2,5% et ν =20

χ2= 34,17