SO00DM17 – STATISTIQUES : TESTS D'HYPOTHÈSES
FORMULAIRE

* TEST 1 *

$H_0 : \mu = \mu_0 \ / \ \mu \neq \mu_0$

<u>Conditions :</u>

- σ connu, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- σ connu, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ « *n assez grand* »
- σ inconnu, $\mathcal{L}(X) \cong \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $n \geq 30 \quad \sigma \cong s$

Le test est basé sur la loi de $\overline{X}$ sous l'hypothèse H_0

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{0}}\left(\overline{X}\right) \cong \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

<u>Test :</u>

1. $\varepsilon \xrightarrow{\text{table 2}} t$
2. $I_A = \left(\mu_0 - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
3. Si $\overline{x} \notin I_A$ → rejet de H_0 au seuil $\varepsilon \Rightarrow \mu \neq \mu_0$
   Si $\overline{x} \in I_A$ → acceptation de H_0, jusqu'à nouvel ordre

* TEST 2 *

$H_0 : \mu = \mu_0 \ / \ \mu \neq \mu_0$

<u>Conditions :</u> σ inconnu, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $n < 30 \quad s_c = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$

Le test est basé sur la loi de $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$ sous l'hypothèse H_0

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{0}}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}\right) \cong \mathcal{T}_{(n\text{-}1)ddl}$$

<u>Test :</u>

1. $\varepsilon \xrightarrow{\text{table 3}} t_{n-1}$
2. $I_A = \left(\mu_0 - t_{n-1} \cdot \frac{s_c}{\sqrt{n}}, \mu_0 + t_{n-1} \cdot \frac{s_c}{\sqrt{n}}\right)$
3. Si $\overline{x} \notin I_A$ → rejet de H_0 au seuil $\varepsilon \Rightarrow \mu \neq \mu_0$
   Si $\overline{x} \in I_A$ → acceptation de H_0, jusqu'à nouvel ordre

* TEST 3 * $\qquad H_0 : p = p_0 \;/\; p \neq p_0$

Conditions : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(1, p) \qquad np_0 \; et \; nq_0 \geq 10$

Le test est basé sur la loi de F_n sous l'hypothèse H_0

$$\mathcal{L}_0(F_n) \cong \mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Test :

1. $\varepsilon \xrightarrow{\text{table 2}} t$
2. $I_A = \left(p_0 - t \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, p_0 + t \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$
3. Si $f_n \notin I_A$ → rejet de H_0 au seuil ε $\Rightarrow p \neq p_0$
   Si $f_n \in I_A$ → acceptation de H_0, jusqu'à nouvel ordre

* TEST 4 * $\qquad H_0 : \mu = \mu' \;/\; \mu \neq \mu'$

Conditions :

- σ et σ' connus, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $\mathcal{L}(X') = \mathcal{N}(\mu', \sigma')$
- σ et σ' connus, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ et $\mathcal{L}(X') = \mathcal{L}(\mu', \sigma')$
  « *n et n' assez grands* »
- σ et σ' inconnus, $\mathcal{L}(X) \cong \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $\mathcal{L}(X') \cong \mathcal{N}(\mu', \sigma')$
  $n \; et \; n' \geq 30 \quad \sigma \cong s \; et \; \sigma' \cong s'$

Le test est basé sur la loi de $\overline{X} - \overline{X}'$ sous l'hypothèse H_0

$$\mathcal{L}_0\left(\overline{X} - \overline{X}'\right) \cong \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma'^2}{n'}}\right)$$

Test :

1. $\varepsilon \xrightarrow{\text{table 2}} t$
2. $I_A = \left(-t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma'^2}{n'}}, +t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma'^2}{n'}}\right)$
3. Si $(\overline{x} - \overline{x}') \notin I_A$ → rejet de H_0 au seuil $\varepsilon \Rightarrow \mu \neq \mu'$
   Si $(\overline{x} - \overline{x}') \in I_A$ → acceptation de H_0, jusqu'à nouvel ordre

* TEST 5 *　　　　$H_0 : \mu = \mu' \,/\, \mu \neq \mu'$

Conditions : σ et σ' inconnus, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $\mathcal{L}(X') = \mathcal{N}(\mu', \sigma')$

$n \; ou \; n' < 30$

Hypothèse supplémentaire : $\sigma^2 = \sigma'^2 \cong s_{0c}^2 = \dfrac{n \cdot s^2 + n' \cdot s'^2}{n + n' - 2}$

Le test est basé sur la loi de $\dfrac{\bar{X} - \bar{X}'}{S_{0c} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n'}}}$ sous l'hypothèse H_0

$$\mathcal{L}_0 \left(\frac{\bar{X} - \bar{X}'}{S_{0c} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n'}}} \right) \cong \mathcal{T}_{(n+n'-2)ddl}$$

Test :

1. $\varepsilon \xrightarrow{\text{table 3}} t_{n+n'-2}$
2. $I_A = \left(-t_{n+n'-2} \cdot s_{0c} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n'}}, +t_{n+n'-2} \cdot s_{0c} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n'}} \right)$
3. Si $(\bar{x} - \bar{x}') \notin I_A$ → rejet de H_0 au seuil $\varepsilon \Rightarrow \mu \neq \mu'$

   Si $(\bar{x} - \bar{x}') \in I_A$ → acceptation de H_0, jusqu'à nouvel ordre

* TEST 6 *　　　　$H_0 : p = p' \,/\, p \neq p'$

Conditions : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(1, p)$ et $\mathcal{L}(X') = \mathcal{B}(1, p')$

Estimation de p et de p' : $p_0 = \dfrac{n \cdot f_n + n' \cdot f'_{n'}}{n + n'}$

$np_0 \; et \; nq_0 \geq 10 \quad et \quad n' p_0 \; et \; n' q_0 \geq 10$

Le test est basé sur la loi de $F_n - F'_{n'}$ sous l'hypothèse H_0

$$\mathcal{L}_0 \left(F_n - F'_{n'} \right) \cong \mathcal{N} \left(0, \sqrt{p_0 q_0 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right)} \right)$$

Test :

1. $\varepsilon \xrightarrow{\text{table 2}} t$
2. $I_A = \left(-t \cdot \sqrt{p_0 q_0 \cdot \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n'} \right)}, +t \cdot \sqrt{p_0 q_0 \cdot \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n'} \right)} \right)$
3. Si $(f_n - f_{n'}) \notin I_A$ → rejet de H_0 au seuil $\varepsilon \Rightarrow p \neq p'$

   Si $(f_n - f_{n'}) \in I_A$ → acceptation de H_0, jusqu'à nouvel ordre

Soit 2 variables aléatoires qualitatives X et Y.

- $x_1, x_2, .., x_r$ r modalités de X
- $y_1, y_2, .., y_s$ s modalités de Y

Hypothèse H_0 : Les variables X et Y sont indépendantes.

On tire un n-échantillon issu de la population P.

	y_1	..	y_j	..	y_s	total
x_1	N_{11}		N_{1j}		N_{1s}	$N_{1.}$
..	..		..		..	
x_i	N_{i1}		N_{ij}		N_{is}	$N_{i.}$
..	..		..		..	
x_r	N_{r1}		N_{rj}		N_{rs}	$N_{r.}$
total	$N_{.1}$		$N_{.j}$		$N_{.s}$	n

N_{ij} : nombre théorique d'individus qui possèdent la modalité x_i de X et y_j de Y.

C_{ij} : nombre théorique d'individus qui possèdent la modalité x_i de X et y_j de Y, si H_0 est vraie.

$$\Rightarrow \quad C_{ij} = \frac{N_{i.} \times N_{.j}}{n}$$

Alors, si « n est assez grand » $\Leftarrow$ 80 % des $C_{ij} \geq 5$

La loi de X^2 sous H_0 :

$$\mathrm{X}^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(N_{ij} - C_{ij}\right)^2}{C_{ij}} \text{ suit une loi du chi-deux } \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

<u>Test</u>

i) Soit le risque $\varepsilon \xrightarrow{\text{table 4}} t_{(r-1)(s-1)}$

ii) $P\left(\mathrm{X}^2 < t_{(r-1)(s-1)}\right) = 1 - \varepsilon$

iii) La décision est prise à partir de la valeur $x^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - c_{ij}\right)^2}{c_{ij}}$

Si $x^2 \leq t$ alors on accepte l'hypothèse d'indépendance jusqu'à nouvel ordre.

Si $x^2 > t$ alors on rejette H_0, au risque ε. Les variables X et Y sont dépendantes, avec un risque ε de se tromper.

ANNEXES : TABLES

Table 1

Table de la loi Normale centrée réduite N(0,1) -L(X*) = N(0,1)

Cette table donne la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure à t : F(t) = P(X* <t)*

L'unité et les déciles de "t"

	les centiles de "t"									
t	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

En grisé les valeurs de 1-α/ 2

Exemple pour α=5% alors (1-α/ 2)=0,975 et t=1,96

Pour les valeurs élevées de t

t	P(X* <t)
3	0,9987
3,5	0,9998
4	1,0000

Quelques valeurs clés pour α

α	$t_{1-\alpha/2}$
1%	2,575
5%	1,960
10%	1,645

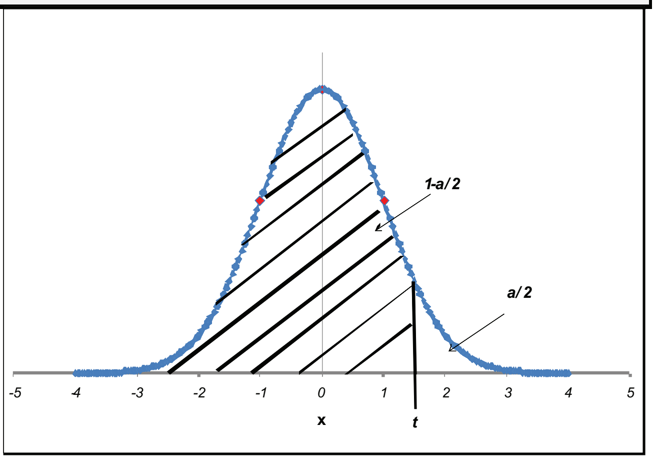

Table 2

Table de la loi Normale centrée réduite N(0,1) -L(X*) = N(0,1)

*Cette table donne pour un "*α*" donné la valeur de "t" telle que P(| X* | >t) =* α

L'unité et les déciles de "α"

α	les centiles de "α" 0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	*infini*	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

En grisé les valeurs de t

Exemple pour α=5% t=1,96

Quelques valeurs clés pour α

α	t
1%	2,575
5%	1,960
10%	1,645

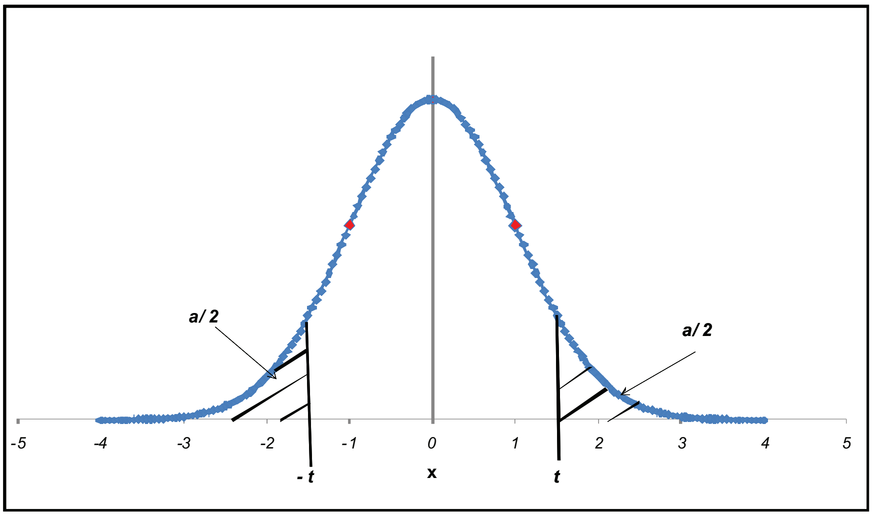

Table 3

Table de la loi de STUDENT

Cette table donne pour un " α" donné et v (degrés de liberté) donné *la valeur de "t" telle que P(|T| >t) = α*

v - degrés de libertés	α = 0,9	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735

En grisé les valeurs de t

Exemple pour α=2% et v=20

t= 2,528

Quelques valeurs clés pour α

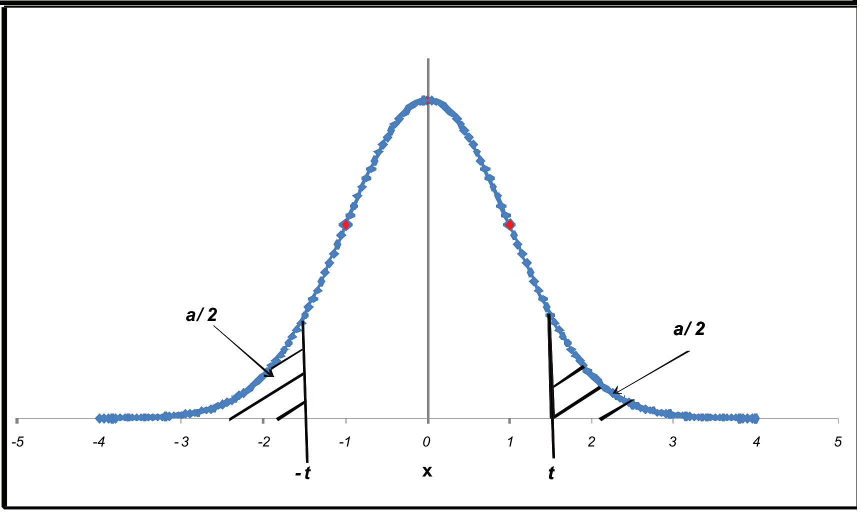

Table 4

Table de la loi du Chi-2

Cette table donne pour un " α" donné et v (degrés de liberté) donné *la valeur du χ2 telle que* $P(Y^2 > \chi_2)$ = α

v - degrés de libertés	α = 0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,12
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,31
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

En grisé les valeurs de χ2

Exemple pour α=2,5% et v =20

χ2= 34,17