EXERCICE 17 *Révision (Propriétés des opérations sur les événements ou ensembles, Probabilités conditionnelles et indépendance)*

Une cité universitaire compte 196 résidents. 112 d'entre eux recyclent le verre usagé, 91 recyclent leurs déchets organiques (un bac à compost se trouve dans le jardin), 75 recyclent les deux. On tire au sort un résident. On appelle *V*, l'événement : "le résident tiré au sort recycle le Verre usagé", et *O*, l'événement : "le résident tiré au sort recycle les déchets Organiques".

1. Calculer la probabilité que le résident tiré au sort recycle au moins un des deux types de déchets mentionnés.

2. En déduire la probabilité que le résident tiré au sort ne recycle aucun des deux types de déchets mentionnés.

3. a) Le résident interrogé déclare recycler ses déchets organiques. Calculer la probabilité qu'il recycle le verre usagé.

b) Les événements *V* et *O* sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Quelle est la probabilité que le résident interrogé recycle exactement un seul des deux types de déchets mentionnés ?

On peut calculer les probabilités suivantes à l'aide des données de l'énoncé :

$P(V)=112/196=0,57$

$P(O)=91/196=0,46$

$P(V\cap O)=75/196=0,38$

1. On veut calculer la probabilité de V ou O soit en notation ensembliste VUO (V union O)
Pour cela, on va utiliser la formule suivante :

$P(VUO) = P(V)+P(O)- P(V\cap O) = 0,57+0,46-0,38 = 0,65$

Il y a 65 % de chances pour que le résident tire au sort recycle au moins 1 des deux types de déchets mentionnés.

2. Ne recycler aucun déchet est l'événement contraire de recycler au moins un type de déchet.
La probabilité recherchée est donc $1-P(VUO) = 1-0,65 = 0,35$

Il y a 35 % de chances pour que le résident ne recycle aucun déchet.

3. a) On cherche une probabilité conditionnelle, P(V/O). On utilise la formule suivante :

$P(V/O) = P(V\cap O)/P(O) = 0,38/0,46 = 0,83$

Il y a 83 % de chance pour que le résident recycle le verre s'il a déclaré recycler les déchets organiques.

b) Les événements V et O sont indépendants si on a $P(V/O)=P(V)$.

Or $P(V) = 0,57$ et $P(V/O)=0,83$. V et O ne sont donc pas indépendants.

4. On cherche la probabilité de l'événement suivant : (V∩Obarre)U(Vbarre∩O). On a :

$P((V\cap Obarre)U(Vbarre\cap O)) = P(V)+P(O)-2P(V\cap O) = 0,57+0,46-2x0,38 = 0,27$

Il y a 27 % de chances pour le résident recycle exactement un type de déchet.

EXERCICE 16 *Loi binomiale (application à l'échantillonnage, utilisation d'une table, distinction entre loi binomiale et loi hypergéométrique)*
1. Dans une population de 30 millions d'électeurs, 1/5e ont l'intention de voter pour Nicolas HULOT. On interroge 20 électeurs au hasard et on appelle *X* le nombre d'intentions de vote en faveur de Nicolas HULOT dans l'échantillon interrogé.
a) Quelle loi suit *X* ? Justifier et donner ses paramètres.
b) Calculer la probabilité que *X* soit compris entre 3 et 5.
c) Retrouver cette probabilité à l'aide d'une table.
2. Dans une entreprise de 128 salariés, 75% sont favorables à la réduction du temps de travail. On interroge 70 salariés sur le sujet, choisis de façon aléatoire. On note *Y* le nombre d'avis recueillis favorables à la réduction du temps de travail. Peut-on considérer que *Y* suit une loi binomiale ? Pourquoi ?

1.Si on prend un électeur au hasard, la probabilité qu'il ait l'intention de voter pour Hulot est 1/5 soit 0,2. Si on note Y la loi suivie par le fait d'avoir l'intention de voter pour Hulot pour un électeur, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre 1 et 0,2 (noté B(1 ; 0,2))

a) Le problème qui se pose pour déterminer la loi de X est que le tirage des 20 électeurs a lieu **sans remise** (on n'interroge pas deux fois la même personne). Cependant, comme 20 est très petit au regard de 30 millions, on peut considérer que le tirage se fait **avec remise** (le critère général est que le taux de sondage soit inférieur à 1/10ème ou 10%).
La loi de Y est donc une loi binomiale de paramètres 20 et 0,2, ce que l'on note L(X)=B(20 ; 0,2)
b) On a :
$P(3\leq X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$
Avec les formules sur la loi binomiale, on calcule les différentes probabilités :
$P(X=3)=C^3_{20}.(0,2)^3.(0,8)^{(20-3)} = 20\,!/(3\,!.(20-3)\,!).(0,2)^3.(0,8)^{17} = 20\,!/(3\,!.17\,!).(0,2)^3.(0,8)^{17}=$
$20x19x18/3x2.(0,2)^3.(0,8)^{17}=0.31$
$P(X=4) =C^4_{20}.(0,2)^4.(0,8)^{(20-4)}=0.22$
$P(X=5) =C^5_{20}.(0,2)^5.(0,8)^{(20-5)}=0.17$
On obtient
$P(3\leq X\leq 5)=0.31+0.22+0.17=0.7$

Il y a 70% de chances pour qu'il y ait entre 3 et 5 personnes qui aient l'intention de voter Hulot.

2. Ici, on ne peut pas faire la même approximation que dans la question précédente car le taux de sondage est supérieur à 1/10 (70/128 > 0,5).On doit donc considérer que X suit une loi hypergéométrique.